Geometría I

Examen III

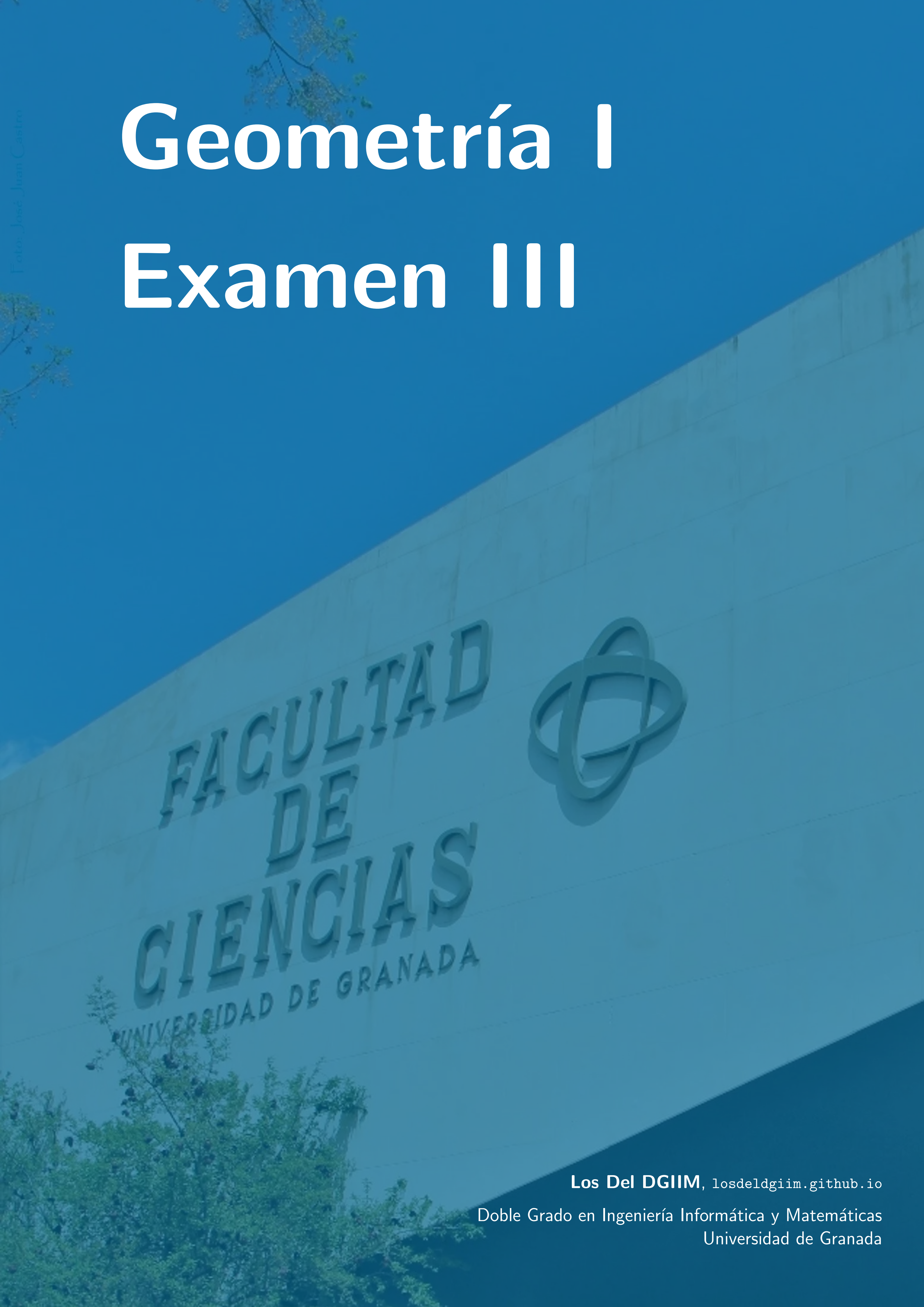

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez.

Descripción 2ª Prueba. Temas 1-4.

Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & a+b-c \\ a+b-c & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1. [5 puntos] Encontrar, si es posible, bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\bar{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$M(f, \bar{\mathcal{B}} \longleftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos las bases usuales de ambos espacios vectoriales. Sea $\mathcal{B}_0 = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}^2[x]$, y sea $\overline{\mathcal{B}_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Calculamos ahora $Ker(f)$.

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \left\{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; \begin{array}{c} a+b=0 \\ c=0 \\ a+b-c=0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; \begin{array}{c} a=-b \\ c=0 \end{array} \right\} \\ &= \mathcal{L}\left(\{1-x\}\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\{(1,-1,0)_{\mathcal{B}_0}\}\right) \end{aligned}$$

Fijamos en primer lugar la base $\mathcal{B}$, sabiendo que el vector que genera el núcleo pertenece a la base:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{B} = \{x, x^2, 1-x\}$$

Una vez fijada dicha base, obtenemos la imagen de dichos vectores:

$$f\left((1,-1,0)_{\mathcal{B}_0}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad f\left((0,1,0)_{\mathcal{B}_0}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,1,0)_{\overline{\mathcal{B}_0}}$$

$$f\left((0,0,1)_{\mathcal{B}_0}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (0,-1,1)_{\overline{\mathcal{B}_0}}$$

Comprobamos que las dos matrices no nulas, junto con una tercera escogida, forman base:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \overline{\mathcal{B}} = \{(1,1,0)_{\overline{\mathcal{B}_0}}, (0,-1,1)_{\overline{\mathcal{B}_0}}, (0,0,1)_{\overline{\mathcal{B}_0}}\}$$

Por tanto, tenemos que las dos bases pedidas son:

$$\mathcal{B} = \{x, x^2, 1-x\}$$

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 2. **[5 puntos]** Dar bases de $Ker(f^t)$ e $Im(f^t)$.

Sea $f^t : (\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))^* \to (\mathbb{R}_2[x])^*$, y consideramos ahora las bases usuales de ambos espacios vectoriales y sus bases duales. Esto es, del espacio vectorial de las matrices simétricas $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ consideramos su base usual $\overline{\mathcal{B}_0}$ y su dual $\left(\overline{\mathcal{B}_0}\right)^*$:

$$\overline{\mathcal{B}_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\overline{\mathcal{B}_0}\right)^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \qquad \varphi_i \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = a_i \quad \forall\, i = 1,2,3$$

Del espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{R}_2[x]$ consideramos su base usual $\mathcal{B}_0$ y su dual $(\mathcal{B}_0)^*$:

$$\mathcal{B}_0 = \{1, x, x^2\}$$

$$(\mathcal{B}_0)^* = \{\psi_1, \psi_3, \psi_3\} \qquad \psi_i \left(a_1 + a_2 x + a_3 x^2\right) = a_i \quad \forall\, i = 1,2,3$$

Del apartado anterior, tenemos que:

$$Ker(f) = \mathcal{L}\left(\{(1,-1,0)_{\mathcal{B}_0}\}\right)$$

$$Im(f) = \mathcal{L}\left(\{(1,1,0)_{\overline{\mathcal{B}_0}}, (0,-1,1)_{\overline{\mathcal{B}_0}}\}\right)$$

Por tanto, calculando ambos anuladores, tenemos lo pedido:

$$\begin{aligned}
Ker(f^t) &= an(Im(f)) = an\left(\mathcal{L}\left(\{(1,1,0)_{\overline{\mathcal{B}_0}}, (0,-1,1)_{\overline{\mathcal{B}_0}}\}\right)\right) \\
&= an\left(\{(1,1,0)_{\overline{\mathcal{B}_0}}, (0,-1,1)_{\overline{\mathcal{B}_0}}\}\right) \\
&= \left\{ \varphi = (a_1,a_2,a_3)_{\left(\overline{\mathcal{B}_0}\right)^*} \in (\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(1,1,0)_{\overline{\mathcal{B}_0}} = 0 \\ \varphi(0,-1,1)_{\overline{\mathcal{B}_0}} = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (a_1,a_2,a_3)_{\left(\overline{\mathcal{B}_0}\right)^*} \in (\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))^* \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0 \\ -a_2 + a_3 = 0 \end{array} \right\} \\
&= \mathcal{L}\left(\{(-1,1,1)_{\left(\overline{\mathcal{B}_0}\right)^*}\}\right) = \mathcal{L}\left(\{-\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3\}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Im(f^t) &= an(Ker(f)) = an\left(\mathcal{L}\left(\{(1,-1,0)_{\mathcal{B}_0}\}\right)\right) \\
&= an\left(\{(1,1,0)_{\mathcal{B}_0}\}\right) \\
&= \left\{ \psi = (a_1,a_2,a_3)_{(\mathcal{B}_0)^*} \in (\mathbb{R}_2[x])^* \;\middle|\; \psi(1,-1,0)_{\mathcal{B}_0} = 0 \right\} \\
&= \left\{ (a_1,a_2,a_3)_{(\mathcal{B}_0)^*} \in (\mathbb{R}_2[x])^* \;\middle|\; a_1 - a_2 = 0 \right\} \\
&= \mathcal{L}\left(\{(1,1,0)_{(\mathcal{B}_0)^*}, (0,0,1)_{(\mathcal{B}_0)^*}\}\right) = \mathcal{L}\left(\{\psi_1 + \psi_2, \psi_3\}\right)
\end{aligned}$$